线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.13 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并写出它的解集.

解 齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形矩阵

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$

其中x_3, x_4是自由未知量.系数矩阵的秩为2，基础解系含2个解.

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}$

其中x_3, x_4是自由未知量.系数矩阵的秩为2，基础解系含2个解.

取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得齐次线性方程组的一个解$\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3.6 线性方程组解的结构(2)

取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得齐次线性方程组的一个解$\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3.6 线性方程组解的结构(2)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得齐次线性方程组的一个解$\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

所以，齐次线性方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3.6 线性方程组解的结构(2)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得齐次线性方程组的一个解 $\eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

所以，齐次线性方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

其全部解为

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{其中} k_1, k_2 \text{是任意数} \right\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

(1) 设$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ 是一般线性方程组(1)的两个解，即对任意的$1 \leq j \leq m$，都有

$$a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \cdots + a_{jn}k_n = b_j,$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

(1) 设$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \zeta_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ 是一般线性方程组(1)的两个解，即对任意的$1 \le j \le m$，都有

$$a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \cdots + a_{jn}k_n = b_j, a_{j1}l_1 + a_{j2}l_2 + \cdots + a_{jn}l_n = b_j,$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

(1) 设$\zeta_1=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}, \zeta_2=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}$是一般线性方程组(1)的两个解，即对任意的$1\le j\le m$，都有

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n=b_j, a_{j1}l_1+a_{j2}l_2+\cdots+a_{jn}l_n=b_j,$$

从而

$$a_{j1}(k_1-l_1)+a_{j2}(k_2-l_2)+\cdots+a_{jn}(k_n-l_n)$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

(1) 设$\zeta_1=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\zeta_2=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}$是一般线性方程组(1)的两个解，即对任意的$1\le j\le m$，都有

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n=b_j,a_{j1}l_1+a_{j2}l_2+\cdots+a_{jn}l_n=b_j,$$

从而

$$\begin{aligned}&a_{j1}(k_1-l_1)+a_{j2}(k_2-l_2)+\cdots+a_{jn}(k_n-l_n)\\&=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)-(a_{j1}l_1+a_{j2}l_2+\cdots+a_{jn}l_n)\end{aligned}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

讨论一般线性方程组(1)的解集结构.

首先探讨(1)的解向量与其导出齐次线性方程组(2)的解向量之间的关系.

(1) 设$\zeta_1=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix},\zeta_2=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_n\end{pmatrix}$是一般线性方程组(1)的两个解，即对任意的$1\le j\le m$，都有

$$a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n=b_j,a_{j1}l_1+a_{j2}l_2+\cdots+a_{jn}l_n=b_j,$$

从而

$$\begin{aligned}&a_{j1}(k_1-l_1)+a_{j2}(k_2-l_2)+\cdots+a_{jn}(k_n-l_n)\\&=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)-(a_{j1}l_1+a_{j2}l_2+\cdots+a_{jn}l_n)\\&=0\end{aligned}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

即，(1)的任意两个解向量之差$\zeta_1 - \zeta_2 = \begin{pmatrix} k_1 - l_1 \\ k_2 - l_2 \\ \vdots \\ k_n - l_n \end{pmatrix}$是其导出齐次线性方程组(2)的解向量；

3.6 线性方程组解的结构(2)

(2) 取(1)的解向量$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ 和(2)的解向量$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$,

3.6 线性方程组解的结构(2)

(2) 取(1)的解向量$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ 和(2)的解向量$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，则

对任意的$1 \leq j \leq m$，有

$$a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \cdots + a_{jn}k_n = b_j,$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

(2) 取(1)的解向量$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$和(2)的解向量$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，则

对任意的$1 \leq j \leq m$，有

$$a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \cdots + a_{jn}k_n = b_j, a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = 0.$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

(2) 取(1)的解向量$\zeta_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$和(2)的解向量$\eta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，则

对任意的$1 \leq j \leq m$，有

$$a_{j1}k_1 + a_{j2}k_2 + \cdots + a_{jn}k_n = b_j, a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = 0.$$

且，向量

$$\zeta_1 + \eta = \begin{pmatrix} k_1 + c_1 \\ k_2 + c_2 \\ \vdots \\ k_n + c_n \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n)$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n)$$
$$=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
& a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n) \\
& =(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n) \\
& =b_j+0
\end{aligned}
$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
&a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n)\\
&=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)\\
&=b_j+0=b_j
\end{aligned}
$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
& a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n) \\
& =(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n) \\
& =b_j+0=b_j
\end{aligned}
$$

即，(1)的任一解向量与(2)任一解向量之和仍是(1)的解向量；

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
& a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n) \\
& =(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n) \\
& =b_j+0=b_j
\end{aligned}
$$

即，(1)的任一解向量与(2)任一解向量之和仍是(1)的解向量；

(3) 取定(1)的一个解向量ξ_0，以及(1)的任意解向量ξ，则$\xi-\xi_0$是(2)的解向量，可以由(2)的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 线性表出。

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$\begin{aligned}
&a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n)\\
&=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)\\
&=b_j+0=b_j
\end{aligned}$$

即，(1)的任一解向量与(2)任一解向量之和仍是(1)的解向量；

(3) 取定(1)的一个解向量ξ_0 ，以及(1)的任意解向量ξ，则$\xi-\xi_0$是(2)的解向量，可以由(2)的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$ 线性表出。即，存在$k_1,k_2,\dots,k_{n-r}\in F$ ，使得

$$\xi-\xi_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
& a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n) \\
& =(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n) \\
& =b_j+0=b_j
\end{aligned}
$$

即，(1)的任一解向量与(2)任一解向量之和仍是(1)的解向量；

(3) 取定(1)的一个解向量ξ_0，以及(1)的任意解向量ξ，则$\xi-\xi_0$是(2)的解向量，可以由(2)的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 线性表出。即，存在$k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}\in F$，使得

$$
\begin{aligned}
& \xi-\xi_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}, \\
& \xi=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},
\end{aligned}
$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

满足

$$
\begin{aligned}
&a_{j1}(k_1+c_1)+a_{j2}(k_2+c_2)+\cdots+a_{jn}(k_n+c_n)\\
&=(a_{j1}k_1+a_{j2}k_2+\cdots+a_{jn}k_n)+(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)\\
&=b_j+0=b_j
\end{aligned}
$$

即，(1)的任一解向量与(2)任一解向量之和仍是(1)的解向量；

(3) 取定(1)的一个解向量ξ_0，以及(1)的任意解向量ξ，则$\xi-\xi_0$是(2)的解向量，可以由(2)的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-r}$ 线性表出。即，存在$k_1,k_2,\dots,k_{n-r}\in F$，使得

$$
\begin{aligned}
\xi-\xi_0&=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},\\
\xi&=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},
\end{aligned}
$$

综上，有定理：

3.6 线性方程组解的结构(2)

定理3.12

3.6 线性方程组解的结构(2)

定理3.12 若n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

的系数矩阵A与增广矩阵$\overline{A}$ 的秩满足$r(A) = r(\overline{A}) = r < n$，$\xi_0$是其一个确定的解，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$是其导出齐次线性方程组的基础解系，

3.6 线性方程组解的结构(2)

定理3.12 若n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

的系数矩阵A与增广矩阵$\overline{A}$ 的秩满足$r(A) = r(\overline{A}) = r < n$，$\xi_0$是其一个确定的解，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-r}$是其导出齐次线性方程组的基础解系，则方程组的全部解为

$$\{\xi|\xi = \xi_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}, \text{其中} k_1, k_2, \ldots, k_{n-r} \text{是任意数}\}.$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

(1) 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

(1) 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

(2) 初等行变换将其化为规范阶梯形矩阵.求出其系数矩阵的秩以及增广矩阵的秩，判断给定方程组解的情形；

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

(1) 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

(2) 初等行变换将其化为规范阶梯形矩阵.求出其系数矩阵的秩以及增广矩阵的秩，判断给定方程组解的情形；

(3) 在方程组有无穷多解时，确定自由未知量，并给定自由未知量的值，求出方程组的一个特解ξ_0 ；

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

(1) 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

(2) 初等行变换将其化为规范阶梯形矩阵.求出其系数矩阵的秩以及增广矩阵的秩，判断给定方程组解的情形；

(3) 在方程组有无穷多解时，确定自由未知量，并给定自由未知量的值，求出方程组的一个特解ξ_0 ；

(4) 利用增广矩阵的规范阶梯形，写出其导出齐次线性方程组的同解方程组，并求出其基础解系$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ；

3.6 线性方程组解的结构(2)

求解一般n 元线性方程组全部解的一般步骤：

(1) 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

(2) 初等行变换将其化为规范阶梯形矩阵.求出其系数矩阵的秩以及增广矩阵的秩，判断给定方程组解的情形；

(3) 在方程组有无穷多解时，确定自由未知量，并给定自由未知量的值，求出方程组的一个特解ξ_0 ；

(4) 利用增广矩阵的规范阶梯形，写出其导出齐次线性方程组的同解方程组，并求出其基础解系$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ ；

(5) 写出给定方程组的全部解

$\{\xi | \xi = \xi_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$, 其中$k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$是任意数$\}$.

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$ 的解集.

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=4 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=-7 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=-2 \end{cases}$ 的解集.

解

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$ 的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为规范阶梯形

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=4 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=-7 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=-2 \end{cases}$ 的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$ 的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -7 \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$ 的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

例3.14

求线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=4 \\ -2x_1+x_2-3x_3+x_4=-7 \\ -x_1-7x_2+9x_3-4x_4=-2 \end{cases}$ 的解集.

解 方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于2，小于未知量个数，方程组有无穷多解.

3.6 线性方程组解的结构(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于2，小于未知量个数，方程组有无穷多解.

方程组同解于$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{17}{5} \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = -\frac{1}{5} \end{cases}$，其中$x_3, x_4$ 是自由未知量.

3.6 线性方程组解的结构(2)

它有一个特解(取自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$对应的解)：

$$\zeta_0 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

3.6 线性方程组解的结构(2)

它有一个特解(取自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$对应的解)：

$$\zeta_0 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

导出齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 0 \end{cases}$

3.6 线性方程组解的结构(2)

它有一个特解(取自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$对应的解):

$$\zeta_0 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

导出齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 0 \end{cases}$

导出组的基础解系为$\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.6 线性方程组解的结构(2)

所以给定方程组的全部解为

$$\left\{ \zeta \middle| \zeta = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{其中} k_1, k_2 \text{是任意数} \right\}.$$

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com