线性代数
第五章：矩阵的等价、相似与合同

宿州学院　数学与统计学院

目录

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^T AP = D$ 。

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP = D$ 。因为$D^T = D$是对称阵，

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP = D$ 。因为$D^T = D$是对称阵，且

$$(P^TAP)^T = P^TA^T(P^T)^T = P^TA^TP,$$

所以$P^TAP = P^TA^TP$ ，

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP=D$ 。因为$D^T=D$是对称阵，且

$$(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TA^TP,$$

所以$P^TAP=P^TA^TP$ ，而P, P^T 均可逆，所以$A^T=A$，A 是对称矩阵.

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP = D$ 。因为$D^T = D$是对称阵，且

$$(P^TAP)^T = P^TA^T(P^T)^T = P^TA^TP,$$

所以$P^TAP = P^TA^TP$ ，而P, P^T 均可逆，所以$A^T = A$，A 是对称矩阵.

即，与对角阵合同的矩阵只能是对称矩阵.

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP=D$ 。因为$D^T=D$是对称阵，且

$$(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TA^TP,$$

所以$P^TAP=P^TA^TP$ ，而P, P^T 均可逆，所以$A^T=A$，A 是对称矩阵.

即，与对角阵合同的矩阵只能是对称矩阵.

那么，对称矩阵是否一定合同于对角阵？

5.3 矩阵的合同对角化

矩阵A 合同于对角阵，则存在可逆矩阵P和对角矩阵D，使得$P^TAP=D$ 。因为$D^T=D$是对称阵，且

$$(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TA^TP,$$

所以$P^TAP=P^TA^TP$ ，而P, P^T 均可逆，所以$A^T=A$，A 是对称矩阵.

即，与对角阵合同的矩阵只能是对称矩阵.

那么，对称矩阵是否一定合同于对角阵？以实对称矩阵为例来解决这个问题.

5.3 矩阵的合同对角化

定义5.7

5.3 矩阵的合同对角化

定义5.7 设$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是两个n 维实向量，称实数

$$\alpha^T \beta = (a_1 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n,$$

为向量α, β 的内积，记作(α, β) .

5.3 矩阵的合同对角化

定义5.7 设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 是两个n 维实向量，称实数

$$\alpha^T\beta=(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$

为向量α, β 的内积，记作(α, β) .

若$(\alpha, \beta)=0$ ，则称α 与β 正交.

5.3 矩阵的合同对角化

定义5.7 设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 是两个n 维实向量，称实数

$$\alpha^T\beta=(a_1\ \cdots\ a_n)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$

为向量α, β 的内积，记作$(\alpha,\ \beta)$.

若$(\alpha,\ \beta)=0$ ，则称α 与β 正交.

若$(\alpha,\ \alpha)=1$ ，则称α 为单位向量.

5.3 矩阵的合同对角化

向量内积具有以下性质：

5.3 矩阵的合同对角化

向量内积具有以下性质：

(1)对称性.任意n维实向量α,β，都有$(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha)$；

5.3 矩阵的合同对角化

向量内积具有以下性质：

(1)对称性.任意n维实向量α, β，都有$(\alpha,\ \beta) = (\beta,\ \alpha)$；

(2)线性性质.任意的实数k 和n 维实向量α, β, γ，都有

$$(k\alpha,\ \beta) = k(\alpha,\ \beta); \quad (\alpha + \beta,\ \gamma) = (\alpha,\ \gamma) + (\beta,\ \gamma);$$

5.3 矩阵的合同对角化

向量内积具有以下性质：

(1)对称性.任意n维实向量α,β，都有$(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha)$；

(2)线性性质.任意的实数k 和n 维实向量α,β,γ，都有

$$(k\alpha,\ \beta)=k(\alpha,\ \beta);\quad (\alpha+\beta,\ \gamma)=(\alpha,\ \gamma)+(\beta,\ \gamma);$$

(3)正定性.任意的α 维实向量，都有$(\alpha,\ \alpha)\geq 0$，且$(\alpha,\ \alpha)=0$ 当且仅当$\alpha=0$.

5.3 矩阵的合同对角化

向量内积具有以下性质：

(1)对称性.任意n维实向量α,β，都有$(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha)$；

(2)线性性质.任意的实数k 和n 维实向量α,β,γ，都有

$$(k\alpha,\ \beta)=k(\alpha,\ \beta);\quad (\alpha+\beta,\ \gamma)=(\alpha,\ \gamma)+(\beta,\ \gamma);$$

(3)正定性.任意的α 维实向量，都有$(\alpha,\ \alpha)\geq 0$，且$(\alpha,\ \alpha)=0$ 当且仅当$\alpha=0$.

内积的线性性质也可以叙述为：任意的实数k,l 和n 维实向量α,β,γ，都有

$$(k\alpha+l\beta,\ \gamma)=k(\alpha,\ \gamma)+l(\beta,\ \gamma).$$

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\frac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \frac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。

则，$(\beta,\ \beta) = 1$ ，

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$。

则，$(\beta,\ \beta) = 1$，即β 是一个单位向量，称β 为向量α 的单位化.

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$ ，即β 是一个单位向量，称β 为向量α 的单位化.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$，即β 是一个单位向量，称β 为向量α 的单位化.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$\beta_1 = \alpha_1$，

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$ ，即β 是一个单位向量，称β 为向量α 的单位化.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$\beta_1 = \alpha_1$，

$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1$，

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$，即β 是一个单位向量，称β 为**向量α 的单位化**.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2,$$

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$，即β 是一个单位向量，称β 为**向量α 的单位化**.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1, \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\frac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \frac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$，即β 是一个单位向量，称β 为**向量α 的单位化**.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{(\alpha_k,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_k,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_k,\ \beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\ \beta_{k-1})}\beta_{k-1}$$

5.3 矩阵的合同对角化

若实向量$\alpha \neq 0$，将α 乘数$\dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}$，得$\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}}\alpha$ 。则，$(\beta,\ \beta) = 1$ ，即β 是一个单位向量，称β 为向量α 的单位化.

设$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_s$是$s$个线性无关的$n$维实向量，取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{(\alpha_k,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_k,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_k,\ \beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\ \beta_{k-1})}\beta_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s,\ \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\ \beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

5.3 矩阵的合同对角化

则，

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$是两两正交的向量组，

且对任意的$k=1,2,\ldots,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$与向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$都是等价的.

5.3 矩阵的合同对角化

则，

β_1, β_2, ..., β_s是两两正交的向量组，

且对任意的$k=1,2,...,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$与向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$都是等价的.

称这个过程为向量组的施密特正交化.

5.3 矩阵的合同对角化

则，

$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s$是两两正交的向量组，

且对任意的$k=1,2,\ldots,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$与向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$都是等价的.

称这个过程为向量组的**施密特正交化**.

线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，将其进行施密特正交化，得两两正交的向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$，

5.3 矩阵的合同对角化

则，

$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_s$是两两正交的向量组，

且对任意的$k=1,2,\dots,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$与向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$都是等价的.

称这个过程为向量组的施密特正交化.

线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$，将其进行施密特正交化，得两两正交的向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_m$，

将向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_m$的每一个向量进行单位化，得$\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m$，

5.3 矩阵的合同对角化

则，

$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_s$是两两正交的向量组，

且对任意的$k=1,2,\ldots,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$与向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$都是等价的.

称这个过程为向量组的施密特正交化.

线性无关的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$，将其进行施密特正交化，得两两正交的向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$，

将向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$的每一个向量进行单位化，得$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$， 则$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ 是两两正交的单位向量组，

且对任意的$k=1,2,\ldots,s$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$与向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k$都是等价的.

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\left(\begin{matrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots \\ & & \\ & & \\ & & \end{matrix}\right.$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & (\alpha_2,\beta_n)\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & (\alpha_2,\beta_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & (\alpha_2,\beta_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\beta_1) & & & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & (\alpha_2,\beta_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\beta_1) & (\alpha_n,\beta_2) & \cdots & \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

考察两个实方阵的乘积.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$是两个n阶方阵，对矩阵A进行行分块，对矩阵B进行列分块，即

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}$$

按照矩阵乘法的定义以及向量内积的定义，则

$$AB=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\beta_1) & (\alpha_1,\beta_2) & \cdots & (\alpha_1,\beta_n)\\ (\alpha_2,\beta_1) & (\alpha_2,\beta_2) & \cdots & (\alpha_2,\beta_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\alpha_n,\beta_1) & (\alpha_n,\beta_2) & \cdots & (\alpha_n,\beta_n)\end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A, B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A, B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

特别，设P是正交矩阵，$P^TP=I$，

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A，B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

特别，设P是正交矩阵，$P^TP=I$，将矩阵P进行列分块，$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A, B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

特别，设P是正交矩阵，$P^TP=I$，将矩阵P进行列分块，$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，

则$P^T=\begin{pmatrix}\alpha_1^{'}\\ \alpha_2^{'}\\ \vdots\\ \alpha_n^{'}\end{pmatrix}$是$P^T$的行分块.

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A, B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

特别，设P是正交矩阵，$P^TP=I$，将矩阵P进行列分块，$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，

则$P^T=\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix}$是$P^T$的行分块. 且

$$P^TP=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

即，矩阵A, B乘积所得积矩阵AB的第k行、l列元素是矩阵A的第k行行向量与矩阵B的第l列列向量的内积.

特别，设P是正交矩阵，$P^TP=I$，将矩阵P进行列分块，
$P=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，

则$P^T=\begin{pmatrix}\alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n'\end{pmatrix}$是$P^T$的行分块. 且

$$P^TP=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

即，正交矩阵的P的列向量组是两两正交的单位向量组.

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l)=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

即，正交矩阵的P的列向量组是两两正交的单位向量组.
假设矩阵Q的列向量组是两两正交的单位向量组，

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l)=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

即，正交矩阵的P的列向量组是两两正交的单位向量组.

假设矩阵Q的列向量组是两两正交的单位向量组，即，对矩阵Q进行列分块，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，都有
$(\alpha_k,\ \alpha_l)=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$ 成立,

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l)=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

即，正交矩阵的P的列向量组是两两正交的单位向量组.

假设矩阵Q的列向量组是两两正交的单位向量组，即，对矩阵Q进行列分块，$Q=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，都有$(\alpha_k,\ \alpha_l)=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$成立，且矩阵$Q$的转置矩阵$Q^T$的行分块为

$$Q^T=\begin{pmatrix}\alpha_1^{'}\\ \alpha_2^{'}\\ \vdots\\ \alpha_n^{'}\end{pmatrix},$$

5.3 矩阵的合同对角化

正交矩阵P的任意列向量α_k，α_l，都有

$$(\alpha_k,\ \alpha_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

即，正交矩阵的P的列向量组是两两正交的单位向量组.

假设矩阵Q的列向量组是两两正交的单位向量组，即，对矩阵Q进行列分块，$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$，都有

$(\alpha_k,\ \alpha_l) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$ 成立, 且矩阵Q的转置矩阵Q^T的行分块为

$$Q^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^{'} \\ \alpha_2^{'} \\ \vdots \\ \alpha_n^{'} \end{pmatrix}, \text{从而} Q^T Q = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

5.3 矩阵的合同对角化

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\text{ 所以}Q\text{是正交矩阵.}$$

5.3 矩阵的合同对角化

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},\text{ 所以}Q\text{是正交矩阵.}$$

即，以两两正交的单位向量为列的n阶方阵一定是正交矩阵.

5.3 矩阵的合同对角化

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$，所以Q是正交矩阵.

即，以两两正交的单位向量为列的n阶方阵一定是正交矩阵.

可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$，列向量$p_1$，$p_2$，$\ldots$，$p_n$是线性无关的，

5.3 矩阵的合同对角化

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}，所以Q是正交矩阵.$$

即，以两两正交的单位向量为列的n阶方阵一定是正交矩阵.

可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$，列向量$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是线性无关的，对其实施施密特正交化，再单位化，可以得到两两正交的单位向量组q_1，q_2，…，q_n，

5.3 矩阵的合同对角化

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}，所以Q是正交矩阵.$$

即，以两两正交的单位向量为列的n阶方阵一定是正交矩阵.

可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$，列向量$p_1$，$p_2$，…，$p_n$是线性无关的，对其实施施密特正交化，再单位化，可以得到两两正交的单位向量组q_1，q_2，…，q_n，以q_1，q_2，…，q_n为列向量构作矩阵$Q=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{pmatrix}$，则$Q$是正交矩阵，且$Q$的列向量组满足，

任意的$k=1,2,\ldots,n$，都有p_1，p_2，…，p_k与q_1，q_2，…，q_k等价.

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^T AP = P^{-1}AP = D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^T AP = P^{-1}AP = D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

即，实对称矩阵合同于对角阵.且合同变换矩阵P的列是A的两两正交的单位特征向量.

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^TAP = P^{-1}AP = D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

即，实对称矩阵合同于对角阵.且合同变换矩阵P的列是A的两两正交的单位特征向量.

那么，对任意n阶实对称矩阵A，是否存在n个两两正交的单位向量组成的特征向量组呢？如果存在，如何求？

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^T AP = P^{-1}AP = D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

即，实对称矩阵合同于对角阵.且合同变换矩阵P的列是A的两两正交的单位特征向量.

那么，对任意n阶实对称矩阵A，是否存在n个两两正交的单位向量组成的特征向量组呢？如果存在，如何求？

先讨论实对称矩阵特征向量满足的性质.

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$.

取$P = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^T AP = P^{-1}AP = D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

即，实对称矩阵合同于对角阵.且合同变换矩阵P的列是A的两两正交的单位特征向量.

那么，对任意n阶实对称矩阵A，是否存在n个两两正交的单位向量组成的特征向量组呢？如果存在，如何求？

先讨论实对称矩阵特征向量满足的性质.

设$A = (a_{ij})_{n\times n}$是一个n阶实对称矩阵，η_1，η_2是矩阵A分别属于特征值$\lambda_1 \neq \lambda_2$的特征向量，

5.3 矩阵的合同对角化

设A是n阶实对称矩阵，且存在n个向量组成的，两两正交的单位特征向量组η_1，η_2，$\ldots$，η_n.

取$P=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}$，则$P$是正交矩阵，并以$A$的线性无关的特征向量为列的可逆矩阵，且$P^TAP=P^{-1}AP=D$是以$A$的特征值为对角元的对角矩阵.

即，实对称矩阵合同于对角阵.且合同变换矩阵P的列是A的两两正交的单位特征向量.

那么，对任意n阶实对称矩阵A，是否存在n个两两正交的单位向量组成的特征向量组呢？如果存在，如何求？

先讨论实对称矩阵特征向量满足的性质.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一个n阶实对称矩阵，η_1，η_2是矩阵A分别属于特征值$\lambda_1\neq\lambda_2$的特征向量，即，

$$A\eta_1=\lambda_1\eta_1，A\eta_2=\lambda_2\eta_2，且\lambda_1\neq\lambda_2.$$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) =$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2) = (\lambda_1\eta_1,\ \eta_2) =$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2)=(\lambda_1\eta_1,\ \eta_2)=(A\eta_1,\ \eta_2)=$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2) = (\lambda_1\eta_1,\ \eta_2) = (A\eta_1,\ \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2)=(\lambda_1\eta_1,\ \eta_2)=(A\eta_1,\ \eta_2)=(A\eta_1)^T\eta_2=\eta_1^TA^T\eta_2$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) =$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2)$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T\eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2)$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T\eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2) = (\lambda_1\eta_1,\ \eta_2) = (A\eta_1,\ \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T\eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1,\ \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1,\ \eta_2) = 0$，

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

设λ_1，λ_2，...，λ_s是实对称矩阵A的全部s个不同特征值.

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T\eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是实对称矩阵$A$的全部$s$个不同特征值.

求出矩阵A属于特征值λ_k的全部线性无关的特征向量，记为$\eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kt_k}$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1,\ \eta_2)=(\lambda_1\eta_1,\ \eta_2)=(A\eta_1,\ \eta_2)=(A\eta_1)^T\eta_2=\eta_1^TA^T\eta_2=\eta_1^T(A\eta_2)=\eta_1^T(\lambda_2\eta_2)=\lambda_2(\eta_1^T\eta_2)=\lambda_2(\eta_1,\ \eta_2)$

所以$(\lambda_1-\lambda_2)(\eta_1,\ \eta_2)=0$，而$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$(\eta_1,\ \eta_2)=0.$

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

设$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$是实对称矩阵$A$的全部$s$个不同特征值.

求出矩阵A属于特征值λ_k的全部线性无关的特征向量，记为$\eta_{k1},\ \eta_{k2},\ \ldots,\ \eta_{kt_k},\ k=1,2,\ldots,s.$

实对称矩阵一定相似于对角阵.

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是实对称矩阵$A$的全部$s$个不同特征值.

求出矩阵A属于特征值λ_k的全部线性无关的特征向量，记为$\eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kt_k}$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

实对称矩阵一定相似于对角阵.

即，n阶实对称矩阵A属于不同特征值线性无关的特征向量个数之和 $t_1 + t_2 + \cdots + t_s = n$

5.3 矩阵的合同对角化

则，$\lambda_1(\eta_1, \eta_2) = (\lambda_1\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1, \eta_2) = (A\eta_1)^T\eta_2 = \eta_1^T A^T \eta_2 = \eta_1^T(A\eta_2) = \eta_1^T(\lambda_2\eta_2) = \lambda_2(\eta_1^T\eta_2) = \lambda_2(\eta_1, \eta_2)$

所以$(\lambda_1 - \lambda_2)(\eta_1, \eta_2) = 0$，而$\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以$(\eta_1, \eta_2) = 0$.

即，实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量是正交的.

设$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$是实对称矩阵$A$的全部$s$个不同特征值.

求出矩阵A属于特征值λ_k的全部线性无关的特征向量，记为$\eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kt_k}$，$k = 1, 2, \ldots, s$.

实对称矩阵一定相似于对角阵.

即，n阶实对称矩阵A属于不同特征值线性无关的特征向量个数之和 $t_1 + t_2 + \cdots + t_s = n$

由此求出实对称矩阵A的全部线性无关的特征向量

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{2t_2}, \ldots, \eta_{s1}, \eta_{s2}, \ldots, \eta_{st_s}$$

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \leq k \neq l \leq s, 1 \leq i \leq t_k$，$1 \leq j \leq t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \le k \ne l \le s, 1 \le i \le t_k$，$1 \le j \le t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \leq k \neq l \leq s, 1 \leq i \leq t_k$，$1 \leq j \leq t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，得属于特征值λ_k的两两正交的单位特征向量组δ_{k1}，δ_{k2}，…，δ_{kt_k}.

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \leq k \neq l \leq s, 1 \leq i \leq t_k$，$1 \leq j \leq t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，得属于特征值λ_k的两两正交的单位特征向量组δ_{k1}，δ_{k2}，…，δ_{kt_k}.最终得到矩阵A全部n个两两正交的单位特征向量组 δ_{11}，δ_{12}，…，δ_{1t_1}，δ_{21}，δ_{22}，…，δ_{2t_2}，…，δ_{s1}，δ_{s2}，…，δ_{st_s}.

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \leq k \neq l \leq s, 1 \leq i \leq t_k$，$1 \leq j \leq t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，得属于特征值λ_k的两两正交的单位特征向量组δ_{k1}，δ_{k2}，…，δ_{kt_k}.最终得到矩阵A全部n个两两正交的单位特征向量组 δ_{11}，δ_{12}，…，δ_{1t_1}, δ_{21}，δ_{22}，…，δ_{2t_2}, …, δ_{s1}，δ_{s2}，…，δ_{st_s}.

取$P = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1t_1} & \cdots & \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{st_s} \end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \leq k \neq l \leq s, 1 \leq i \leq t_k$，$1 \leq j \leq t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，得属于特征值λ_k的两两正交的单位特征向量组δ_{k1}，δ_{k2}，…，δ_{kt_k}.最终得到矩阵A全部n个两两正交的单位特征向量组 δ_{11}，δ_{12}，…，δ_{1t_1}, δ_{21}，δ_{22}，…，δ_{2t_2}, …, δ_{s1}，δ_{s2}，…，δ_{st_s}.

取$P = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1t_1} & \cdots & \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{st_s} \end{pmatrix}$

即，P是以矩阵A的n个两两正交的单位特征向量组为列的正交矩阵，

5.3 矩阵的合同对角化

实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的，即，任意的$1 \le k \ne l \le s, 1 \le i \le t_k$，$1 \le j \le t_l$，都有$\eta_{ki}$与$\eta_{lj}$是正交的；

将属于λ_k的线性无关的特征向量η_{k1}，η_{k2}，…，η_{kt_k}进行施密特正交化，再单位化，得属于特征值λ_k的两两正交的单位特征向量组δ_{k1}，δ_{k2}，…，δ_{kt_k}.最终得到矩阵A全部n个两两正交的单位特征向量组 δ_{11}，δ_{12}，…，$\delta_{1t_1}, \delta_{21}$，$\delta_{22}$，…，$\delta_{2t_2}, \ldots, \delta_{s1}$，$\delta_{s2}$，…，$\delta_{st_s}$.

取$P = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1t_1} & \cdots & \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{st_s} \end{pmatrix}$

即，P是以矩阵A的n个两两正交的单位特征向量组为列的正交矩阵，所以

5.3 矩阵的合同对角化

$$P^T AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

$$P^TAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix}$$

由此，对任意一个实对称矩阵A，都可以求得正交矩阵P，使得$P^TAP = P^{-1}AP = D$是对角矩阵，且D的对角元λ_k是矩阵P的第k列对应的特征值.

5.3 矩阵的合同对角化

$$P^TAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s I_{t_s} \end{pmatrix}$$

由此，对任意一个实对称矩阵A，都可以求得正交矩阵P，使得$P^TAP = P^{-1}AP = D$是对角矩阵，且D的对角元λ_k是矩阵P的第k列对应的特征值.

例5.4 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的全部特征值和特征向量，并求正交矩阵$P$，使得$P^TAP$为对角阵.

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I-A|=$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

所以矩阵A的全部特征值为$\lambda_1 = 5$(二重)，$\lambda_2 = -4$.

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

所以矩阵A的全部特征值为$\lambda_1 = 5$(二重)，$\lambda_2 = -4.$

将$\lambda_1 = 5$带入齐次线性方程$(\lambda I - A)X = 0$得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\text{，得基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

解 矩阵A的特征多项式 $|\lambda I - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & -2\lambda+10 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 10 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

所以矩阵A的全部特征值为$\lambda_1 = 5$(二重)，$\lambda_2 = -4.$

将$\lambda_1 = 5$带入齐次线性方程$(\lambda I - A)X = 0$得

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0，\text{得基础解系}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即矩阵A属于特征值$\lambda_1 = 5$有两个线性无关的特征向量.

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1 = 5$的两个线性无关的特征向量正交化.

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1 = 5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1 = 5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\delta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\delta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\delta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\delta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}$

A属于特征值$\lambda_1=5$有两个正交的特征向量$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

将属于特征值$\lambda_1=5$的两个线性无关的特征向量正交化.

取$\delta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\delta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}$

A属于特征值$\lambda_1=5$有两个正交的特征向量$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-1\end{pmatrix}$

再单位化，得A属于特征值$\lambda_1=5$的两个正交的单位特征向量 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{(\delta_1,\delta_1)}}\delta_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{(\delta_2,\delta_2)}}\delta_2=\begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

将$\lambda_2=-4$带入齐次线性方程$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0\text{，得基础解系}\delta_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

将$\lambda_2=-4$带入齐次线性方程$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0，\text{得基础解系}\delta_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

即矩阵A属于特征值$\lambda_2=-4$有一个线性无关的特征向量.

5.3 矩阵的合同对角化

将$\lambda_2=-4$带入齐次线性方程$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0\text{，得基础解系}\delta_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

即矩阵A属于特征值$\lambda_2=-4$有一个线性无关的特征向量.

将其单位化，得属于特征值$\lambda_2=-4$的单位特征向量

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{(\delta_3,\delta_3)}}\delta_3=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5.3 矩阵的合同对角化

将$\lambda_2=-4$带入齐次线性方程$(\lambda I-A)X=0$得

$$\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0，得基础解系\delta_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

即矩阵A属于特征值$\lambda_2=-4$有一个线性无关的特征向量.

将其单位化，得属于特征值$\lambda_2=-4$的单位特征向量

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{(\delta_3,\delta_3)}}\delta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

取$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

5.3 矩阵的合同对角化

则P是正交矩阵，且P的第1、2列是属于$\lambda_1 = 5$的特征向量，第3列是属于特征值$\lambda_2 = -4$的特征向量.

5.3 矩阵的合同对角化

则P是正交矩阵，且P的第1、2列是属于$\lambda_1 = 5$的特征向量，第3列是属于特征值$\lambda_2 = -4$的特征向量.

所以

$$P^T AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com