线性代数
第三章：向量空间
习 题 解 答

宿州学院　数学与统计学院

目录

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

1.解

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

1.解 (1)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\\-13\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\-6\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

1.解 (1)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\\-13\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\-6\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

1.解 (1)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\\-13\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\-6\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\-5\\1\\-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\-6\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(2)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\6\\4\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(2)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\6\\4\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+x_5\alpha_5=\beta.$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(2)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\0\\6\\4\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+x_5\alpha_5=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}1\\-3\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\6\\4\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(3)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111} - P_{112}$)

(3)记

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(3)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(4)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(4)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$.

习题3.1($P_{111} - P_{112}$)

(4)记

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$. 即

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(5)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(5)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(5)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(6)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\7\\-5\\1\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(6)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\7\\-5\\1\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(6)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\7\\-5\\1\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-5\\-3\\12\\16\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-2\\1\\7\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\\-5\\1\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(7)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-a_1\\a_2\\-a_3\\a_4\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(7)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-a_1\\a_2\\-a_3\\a_4\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(7)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-a_1\\a_2\\-a_3\\a_4\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1\\a_2\\-a_3\\a_4\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(8)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(8)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(8)记

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},$$

则方程组可以表示为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$. 即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

2.解

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

2.解 以x_k表示对食物k的需求量，$k=1,2,3$.依题意，则

$$x_1\begin{pmatrix}10\\50\\30\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}20\\10\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\300\\200\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

2.解 以x_k表示对食物k的需求量，$k=1,2,3$.依题意，则

$$x_1\begin{pmatrix}10\\50\\30\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}20\\10\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\300\\200\end{pmatrix}.$$

方程组的系数矩阵可逆，且$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{22}&\frac{1}{55}&\frac{1}{55}\\\frac{17}{330}&\frac{1}{165}&-\frac{3}{110}\\\frac{7}{330}&-\frac{1}{66}&\frac{1}{55}\end{pmatrix}$，

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

2.解 以x_k表示对食物k的需求量，$k=1,2,3.$依题意，则

$$x_1\begin{pmatrix}10\\50\\30\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}20\\40\\10\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}20\\10\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\300\\200\end{pmatrix}.$$

方程组的系数矩阵可逆，且$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{22}&\frac{1}{55}&\frac{1}{55}\\\frac{17}{330}&\frac{1}{165}&-\frac{3}{110}\\\frac{7}{330}&-\frac{1}{66}&\frac{1}{55}\end{pmatrix}$，

方程组的解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{22}&\frac{1}{55}&\frac{1}{55}\\\frac{17}{330}&\frac{1}{165}&-\frac{3}{110}\\\frac{7}{330}&-\frac{1}{66}&\frac{1}{55}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\300\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{50}{11}\\\frac{50}{33}\\\frac{40}{33}\end{pmatrix}.$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

3.解

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

3.解 (1)各节点未知流量满足的方程

A点：$-x_1+x_2+x_4=300$；

B点：$x_2+x_6=500$；

C点：$-x_3+x_7=200$；

D点：$x_4+x_5=800$；

E点：$x_5+x_6=800$；

F点：$x_7+x_8=1000$；

G点：$x_9=400$；

H点：$-x_9+x_{10}=200$；

J点：$x_{10}=600$；

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

3.解 (1)各节点未知流量满足的方程

A点：$-x_1+x_2+x_4=300$；

B点：$x_2+x_6=500$；

C点：$-x_3+x_7=200$；

D点：$x_4+x_5=800$；

E点：$x_5+x_6=800$；

F点：$x_7+x_8=1000$；

G点：$x_9=400$；

H点：$-x_9+x_{10}=200$；

J点：$x_{10}=600$；

(2)用数组向量表示为

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

$$x_1\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_6\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

$$x_7\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_8\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_9\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_{10}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\500\\200\\800\\800\\1000\\200\\600\end{pmatrix}$$

习题3.1($P_{111}-P_{112}$)

(3)未知流量为

$$\begin{cases} x_1 &= 200 \\ x_2 &= 500 - x_6 \\ x_3 &= 800 - x_8 \\ x_4 &= x_6 \\ x_5 &= 800 - x_6 \\ x_7 &= 1000 - x_8 \\ x_9 &= 400 \\ x_{10} &= 600 \end{cases}$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1,O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1=O_1+O_2=O_2,$$

即零向量唯一.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1, O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1, β_2是α的负元，则

$$\alpha + \beta_1 = \beta_2 + \alpha = 0,$$

从而

$$\beta_1 =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1, O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1, β_2是α的负元，则

$$\alpha + \beta_1 = \beta_2 + \alpha = 0,$$

从而

$$\beta_1 = 0 + \beta_1 =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1, O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1, β_2是α的负元，则

$$\alpha + \beta_1 = \beta_2 + \alpha = 0,$$

从而

$$\beta_1 = 0 + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1, O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1 = O_1 + O_2 = O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1, β_2是α的负元，则

$$\alpha + \beta_1 = \beta_2 + \alpha = 0,$$

从而

$$\beta_1 = 0 + \beta_1 = (\beta_2 + \alpha) + \beta_1 = \beta_2 + (\alpha + \beta_1) =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1,O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1=O_1+O_2=O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1,β_2是α的负元，则

$$\alpha+\beta_1=\beta_2+\alpha=0,$$

从而

$$\beta_1=0+\beta_1=(\beta_2+\alpha)+\beta_1=\beta_2+(\alpha+\beta_1)=\beta_2+0=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1,O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1=O_1+O_2=O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1,β_2是α的负元，则

$$\alpha+\beta_1=\beta_2+\alpha=0,$$

从而

$$\beta_1=0+\beta_1=(\beta_2+\alpha)+\beta_1=\beta_2+(\alpha+\beta_1)=\beta_2+0=\beta_2,$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

1.证明 (1)假设O_1,O_2是向量空间中的两个零向量，由零向量的性质，与任何向量的和都是任何向量自己，则

$$O_1=O_1+O_2=O_2,$$

即零向量唯一.

(2)设β_1,β_2是α的负元，则

$$\alpha+\beta_1=\beta_2+\alpha=0,$$

从而

$$\beta_1=0+\beta_1=(\beta_2+\alpha)+\beta_1=\beta_2+(\alpha+\beta_1)=\beta_2+0=\beta_2,$$

所以α的负元唯一.

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(3)因为

$$k0 =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0 = k(0+0) =$$

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(3)因为

$$k0 = k(0+0) = k0 + k0,$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

而

$$k\beta+k(-\beta)=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

而

$$k\beta+k(-\beta)=k[\beta+(-\beta)]=$$

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(3)因为

$$k0 = k(0+0) = k0 + k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0), \ k0 = 0.$$

(4)因为

$$k(\alpha - \beta) = k(\alpha + (-\beta)) = k\alpha + k(-\beta),$$

而

$$k\beta + k(-\beta) = k[\beta + (-\beta)] = k0 = 0,$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

而

$$k\beta+k(-\beta)=k[\beta+(-\beta)]=k0=0, k(-\beta)=-k\beta,$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

而

$$k\beta+k(-\beta)=k[\beta+(-\beta)]=k0=0,k(-\beta)=-k\beta,$$

所以$k(\alpha-\beta)=k\alpha+k(-\beta)=$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)因为

$$k0=k(0+0)=k0+k0,$$

两边同时加上$k0$的负向量，则

$$k0+(-k0)=k0+k0+(-k0),\ k0=0.$$

(4)因为

$$k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta),$$

而

$$k\beta+k(-\beta)=k[\beta+(-\beta)]=k0=0,k(-\beta)=-k\beta,$$

所以$k(\alpha-\beta)=k\alpha+k(-\beta)=k\alpha-k\beta.$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

3.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

3.解 (1)$\gamma=\beta-\alpha=$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

3.解 (1) $\gamma=\beta-\alpha=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}=$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

2.解

$$\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

3.解 (1)$\gamma=\beta-\alpha=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\\-7\end{pmatrix};$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)$\eta=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)=$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)$\eta=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-3\\\frac{9}{2}\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}.$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)$\eta=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-3\\\frac{9}{2}\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}.$

4.解

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(2)$\eta = \frac{1}{2}(3\alpha - \beta) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -3 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{21}{2} \end{pmatrix}.$

4.解 因为$3(\alpha_1 - \xi) + 2(\alpha_2 + \xi) = 5(\alpha_3 + \xi)$，所以

$$\xi = \frac{1}{6}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3) =$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)$\eta=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-3\\\frac{9}{2}\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}.$

4.解 因为$3(\alpha_1-\xi)+2(\alpha_2+\xi)=5(\alpha_3+\xi)$，所以

$$\xi=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{6}[3\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}]=$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)$\eta=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-3\\\frac{9}{2}\\\frac{21}{2}\end{pmatrix}.$

4.解 因为$3(\alpha_1-\xi)+2(\alpha_2+\xi)=5(\alpha_3+\xi)$，所以

$$\xi=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{6}[3\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}]=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

习题3.2$(P_{113}-P_{115})$

5.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

5.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

5.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

5.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&-1&5\\1&1&-1&-6\end{pmatrix}$，

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

5.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&-1&5\\1&1&-1&-6\end{pmatrix}$，

对增广矩阵实施初等行变换，化为规范阶梯形

$$\overline{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-11\\0&1&0&14\\0&0&1&9\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

5.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&1&-1&5\\1&1&-1&-6\end{pmatrix}$，

对增广矩阵实施初等行变换，化为规范阶梯形

$$\overline{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-11\\0&1&0&14\\0&0&1&9\end{pmatrix},$$

所以$\beta=(-11)\alpha_1+14\alpha_2+9\alpha_3$.

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(2)设$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4 = \beta$，即

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)设$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\1\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)设$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\1\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(2)设$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\1\end{pmatrix},$$

所以$\beta=2\varepsilon_1+(-1)\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\varepsilon_4.$

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

6.证明

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

6.证明 因为

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

6.证明 因为

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix},$$

所以任意向量α都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$线性表出.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

6.证明 因为

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix},$$

所以任意向量α都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$线性表出. 而由

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

6.证明 因为

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\cdots+a_{n-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}+a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix},$$

所以任意向量α都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n$线性表出. 而由

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

所以表示法唯一，且$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

7.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

7.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

7.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\-5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\7\\-3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

7.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\-5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\7\\-3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&2&-4&8\\3&0&1&3\\0&7&-2&-1\\-5&-3&6&-25\end{pmatrix}$，

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

7.解 (1)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\-5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\0\\7\\-3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\-1\\-25\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&2&-4&8\\3&0&1&3\\0&7&-2&-1\\-5&-3&6&-25\end{pmatrix}$，

且$\overline{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&3&-5&-8\\7&-5&-6&-3\\1&0&3&7\\3&-2&-1&-10\end{pmatrix}$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&3&-5&-8\\7&-5&-6&-3\\1&0&3&7\\3&-2&-1&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-9&-25\\0&0&82&177\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&3&-5&-8\\7&-5&-6&-3\\1&0&3&7\\3&-2&-1&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-9&-25\\0&0&82&177\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

最后一列有主元，对应的方程组无解.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

所以$\beta=2\alpha_1+(-1)\alpha_2+(-3)\alpha_3$.

(2)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&3&-5&-8\\7&-5&-6&-3\\1&0&3&7\\3&-2&-1&-10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&3&7\\0&1&-9&-25\\0&0&82&177\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

最后一列有主元，对应的方程组无解.向量β不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-30\\13\\-26\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-30\\13\\-26\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\-5&7&11&-30\\2&-3&-5&13\\-4&6&10&-26\end{pmatrix}$$

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-30\\13\\-26\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2\\-5 & 7 & 11 & -30\\2 & -3 & -5 & 13\\-4 & 6 & 10 & -26\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\0 & 1 & 3 & -5\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-30\\13\\-26\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\-5&7&11&-30\\2&-3&-5&13\\-4&6&10&-26\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&3&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的方程组中，x_3是自由未知量，所以β有无穷多种由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的表示方式.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

(3)设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$x_1\begin{pmatrix}3\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-1\\7\\-3\\6\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\11\\-5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-30\\13\\-26\end{pmatrix},$$

相应方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\-5&7&11&-30\\2&-3&-5&13\\-4&6&10&-26\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&3&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的方程组中，x_3是自由未知量，所以β有无穷多种由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的表示方式.

即$\beta=(-1-2x_3)\alpha_1+(-5-3x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3$，其中$x_3$是任意数.

习题3.2($P_{113} - P_{115}$)

8.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2,$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，即$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$有解，

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设
$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，即$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$有解，相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&a\\0&1&3\end{pmatrix}$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，即$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$有解，相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&a\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&3\\0&0&22-2a\end{pmatrix}$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，即$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$有解，相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&a\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&3\\0&0&22-2a\end{pmatrix}$$

相应方程组有解的充要条件是$22-2a=0$, $a=11$.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

8.解 因为β可以由α_1,α_2线性表出，所以可设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，即$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$有解，相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&a\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&3\\0&0&22-2a\end{pmatrix}$$

相应方程组有解的充要条件是$22-2a=0$, $a=11$.

所以$a=11$.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解 设$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解 设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解 设$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\4 & 7 & 1 & 10\\0 & 1 & -1 & b\\2 & 3 & a & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & a-1 & 0\\0 & 0 & 0 & b-2\end{pmatrix},$$

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解 设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

(1)$b-2\neq0$，即$b\neq2$时，相应的方程组无解，β不可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

9.解 设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即

$$x_1\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix},$$

相应方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

(1)$b-2\neq 0$，即$b\neq 2$时，相应的方程组无解，β不可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

(2)$b-2=0$，即$b=2$时，相应的方程组有解，β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

在$b=2$且$a\neq 1$时，相应方程组有唯一解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

在$b=2$且$a\neq 1$时，相应方程组有唯一解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出.

这时，$\beta=(-1)\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$；

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

在$b=2$且$a\neq 1$时，相应方程组有唯一解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出.

这时，$\beta=(-1)\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$；

在$b=2$且$a=1$时，相应方程组有无穷多解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无穷多种线性表出方式.

习题3.2($P_{113}-P_{115}$)

在$b=2$且$a\neq 1$时，相应方程组有唯一解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一的线性表出.

这时，$\beta=(-1)\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$；

在$b=2$且$a=1$时，相应方程组有无穷多解，即β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无穷多种线性表出方式.

这时，$\beta=(-1-2x_3)\alpha_1+(2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3$，其中$x_3$是任意数.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com